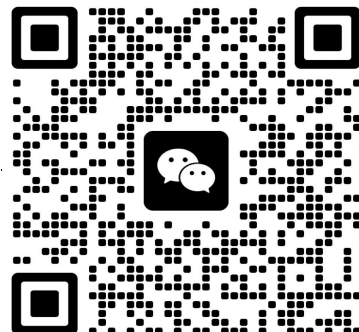
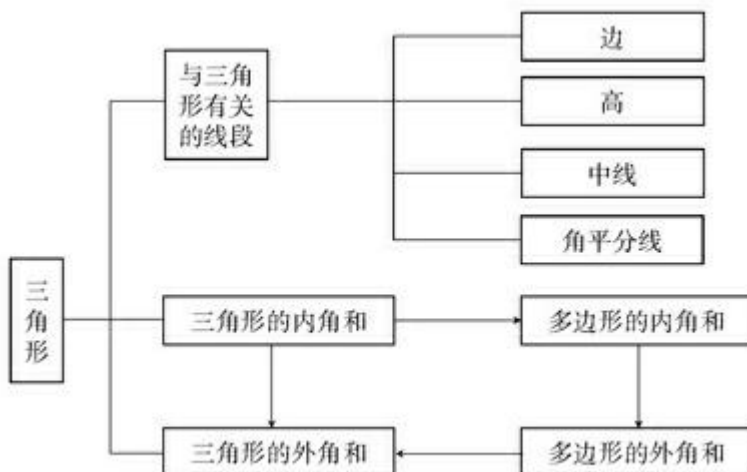


第十一章 三角形



一. 知识框架



二. 知识概念

1. 三角形

(1) 三角形的定义及表示

①三角形：由不在同一直线上的三条线段首尾顺次相接所组成的图形叫做三角形。

②三角形的表示：顶点是 A, B, C 的三角形记作“ $\triangle ABC$ ”，读作“三角形 ABC”。也可以用 a, b, c 表示三角形的三条边。

(2) 三角形的分类

①按角分类

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{斜三角形} \left\{ \begin{array}{l} \text{锐角三角形} \\ \text{钝角三角形} \end{array} \right. \\ \text{直角三角形} \end{array} \right.$$

②按边分类

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{不等边三角形} \\ \text{等腰三角形} \left\{ \begin{array}{l} \text{底边和腰不相等的等腰三角形} \\ \text{等边三角形（正三角形）} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

(3) 三角形的描述

①等边三角形：三边都相等的三角形叫做等边三角形，又叫正三角形。

②等腰三角形：有两条边相等的三角形叫等腰三角形。其中相等的边都叫腰，另一条边叫做底。两腰的夹角叫做顶角，腰和底边的夹角叫做底角。

③不等边三角形：三边都不相等的三角形叫做不等边三角形。

④等边三角形是特殊的等腰三角形，即底边和腰相等的等腰三角形。

数学八年级（上册）知识点总结

(4) 三角形的三边关系：三角形任意两边的和大于第三边，任意两边的差小于第三边。

【拓展：三边关系的运用】

- ①判断三条线段能否组成三角形；
- ②当已知三角形的两边长时，可求第三边的取值范围。

(5) 三角形的稳定性

- ①三角形的形状是固定的，三角形的这个性质叫三角形的稳定性。三角形具有稳定性，而四边形没有稳定性。
- ②三角形的稳定性有广泛的运用：桥梁、起重机、人字形屋顶、桌椅等。

2. 三角形的高、中线和角平分线

- (1) 高：从三角形的一个顶点向它的对边所在直线作垂线，顶点和垂足间的线段叫做三角形的高。
- (2) 中线：在三角形中，连接一个顶点和它的对边中点的线段叫做三角形的中线。
- (3) 角平分线：三角形的一个内角的平分线与这个角的对边相交，这个角的顶点和交点之间的线段叫做三角形的角平分线。

【拓展：三线合一】

只有在等腰(边)三角形中，有三角形的高、中线与角平分线互相重合的情况，简称“三线合一”。

(4) “三线”的位置：一个三角形有三条中线、三条角平分线、三条高线，他们都分别交于一点。

线的名称	线的位置	交点名称
中线	三条中线交于三角形内部	重心
角平分线	三条角平分线交于三角形内部	内心
高线	锐角三角形：三条高都在三角形内部	垂心
	直角三角形：其中两条高恰好是直角边	
	钝角三角形：其中两条高线在三角形外部	

3. 与三角形有关的角

(1) 三角形的内角

- ①三角形内角和定理：三角形三个内角的和等于 180 度。
- ②证明方法：剪拼成平角、通过做平行线构造平角、构造两平行线下的同旁内角。

(2) 三角形的外角

- ①定义：三角形的一边与另一条边的延长线组成的角，叫做三角形的外角。
- ②结论：三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角和；三角形的一个外角大于与它不相邻的任何一个角。

(3) 互余

- ①直角三角形的两个角互余。直角三角形用符号“Rt△”表示，如 Rt△ABC。
- ②有两个角互余的三角形是直角三角形。

4. 多边形及其内角和

（1）多边形

- ①多边形：在平面内，由一些线段首位顺次相接组成的图形叫做多边形。
- ②多边形的内角：多边形相邻两边所组成的角叫做多边形的内角。
- ③多边形的外角：多边形的边与它的邻边的延长线组成的角叫做多边形的外角。
- ④多边形的对角线：连接多边形不相邻的两个顶点的线段叫做多边形的对角线。一个 n 边形从一个顶点出发有 $(n-3)$ 条对角线，所有对角线的数量是 $\frac{n(n-3)}{2}$ 条。
- ⑤凸多边形：画出多边形的任何一条边所在的直线，如果整个多边形都在这条直线的同一侧，这样的多边形叫做凸多边形。
- ⑥正多边形：各个角都相等，各条边都相等的多边形叫做正多边形。

（2）多边形的内角和、外角和

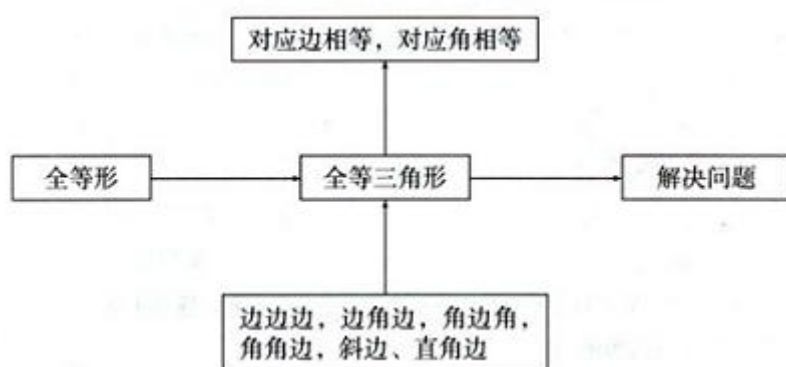
- ①多边形的内角和公式： n 边形内角和等于 $(n-2) \cdot 180^\circ$ 。
- ②定理：多边形的外角和等于 360° 。

【思考】如何推导多边形的内角和以及外角和？

（3）平面镶嵌：用一些不重叠摆放的多边形把平面的一部分完全覆盖，叫做用多边形覆盖平面。

第十二章 全等三角形

一. 知识框架



二. 知识概念

1. 全等三角形

（1）全等三角形的定义：两个三角形的形状、大小、都一样时，其中一个可以经过平移、旋转、对称等运动（或称变换）使之与另一个重合，这两个三角形称为全等三角形。简而言之就是能够完全重合的两个三角形叫做全等三角形。

数学八年级（上册）知识点总结

(2) 全等三角形的表示：全等的符号： $\cong$ ，读作“全等于”。

$\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 全等，记作： $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ，读作：“三角形 ABC 全等于三角形 DEF”。

(3) 对应元素：把两个全等的三角形重合到一起，重合的顶点叫做对应顶点，重合的边叫做对应边，重合的角叫做对应角。

(4) 全等三角形的性质

- ①全等三角形的对应边相等；
- ②全等三角形的对应角相等。

2. 三角形全等的判定

(1) 三角形全等的判定公理

方法	内容	符号	适用范围
方法 1	三边对应相等的两个三角形全等	边边边 SSS	所有三角形
方法 2	两边和它们的夹角对应相等的两个三角形全等	边角边 SAS	所有三角形
方法 3	两角和它们的夹边对应相等的两个三角形全等	角边角 ASA	所有三角形
方法 4	两个角和其中一个角的对边对应相等的两个三角形全等	角角边 AAS	所有三角形
方法 5	斜边和一条直角边对应相等的两个直角三角形全等	斜直边 HL	直角三角形

【拓展】证明两三角形全等或利用它证明线段或角的相等的基本方法步骤：

- ①确定已知条件（包括隐含条件，如公共边、公共角、对顶角、角平分线、中线、高、等腰三角形、等所隐含的边角关系）；
- ②回顾三角形判定，搞清我们还需要什么；
- ③正确地书写证明格式（顺序和对应关系从已知推导出要证明的问题）。

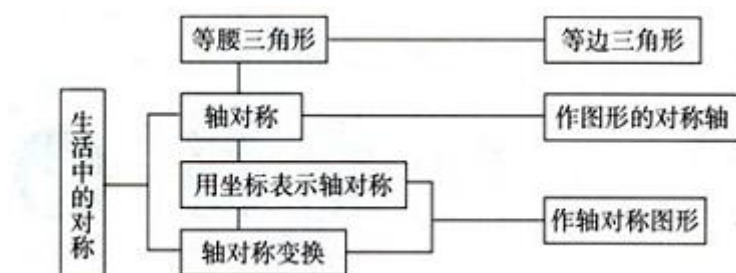
3. 角平分线的性质

(1) 角平分线性质的定理：角的平分线上的点到角的两边的距离相等。

(2) 角平分线推论（判定）：角的内部到角的两边的距离相等的点在角的平分线上。

第十三章 轴对称

一. 知识框架



二. 知识概念

1. 轴对称

（1）轴对称图形：如果一个图形沿某条直线折叠后，直线两旁的部分能够互相重合，那么这个图形叫做轴对称图形；这条直线叫做对称轴。

（2）轴对称图形的性质

- ①轴对称图形（或关于某条直线对称的两个图形）的对应线段相等，对应角相等。
- ②如果两个图形关于某条直线对称，那么对称轴是任何一对对应点所连线段的垂直平分线。类似地，轴对称图形的对称轴，是任何一对对应点所连线段的垂直平分线。

（3）线段的垂直平分线

- ①定义：经过线段中点并且垂直于这条线段的直线，叫做这条线段的垂直平分线，或中垂线。
- ②垂直平分线（性质）定理：垂直平分线上的点到线段两端点的距离相等。
- ③垂直平分线逆（性质）定理：到线段两端点距离相等的点，在这条线段的垂直平分线上。

（4）画图形的对称轴

如果一个轴对称图形或两个图形成轴对称，其对称轴就是任何一对对应点所连线段的垂直平分线。因此，只要找到一对对应点，作出连接它们的线段的垂直平分线，就可以得到这两个图形的对称轴。

2. 作轴对称图形

（1）作一个图形的对称轴图形的方法

只要作出图形中的一些特殊点（或线段端点）的对称点，连接这些对称点，就可以得到原图形的轴对称图形。

（3）用坐标表示轴对称

①已知点关于 x 轴或者 y 轴对称的点的坐标规律：

点 (x, y) 关于 x 轴对称点的坐标为 $(x, -y)$ ；

点 (x, y) 关于 y 轴对称点的坐标为 $(-x, y)$ ；

【拓展】

点 (a, b) 关于原点的对称点为 $(-a, -b)$ ；

点 (a, b) 关于一、三象限角平分线的对称点为 (b, a) ；

点 (a, b) 关于二、四象限角平分线的对称点为 $(-b, -a)$

②在坐标系中作一个已知图形的对称图形的方法：只要找到已知图形中一些特殊点（如多边形的顶点）的对称点的坐标，描出并连接这些点，就可以得到这个图形的轴对称图形。

3. 等腰三角形

（1）等腰三角形的定义

有两条边相等的三角形叫做等腰三角形。相等的两条边叫做腰，另一条边叫做底边，两腰的夹角叫做顶角，底边与腰的夹角叫做底角。

（2）等腰三角形的性质

性质 1：等腰三角形的两个底角相等。（简写成“等边对等角”）

性质 2：等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线、底边上的高相互重合。（简称“三线合一”，其中这条线所在的直线就是它的对称轴。）

（3）等腰三角形的判定

①利用定义。

②如果一个三角形有两个角相等，则这两个角所对的边也相等。（简称“等角对等边”）

（4）等边三角形的性质和判定方法

性质：等边三角形的三个内角都相等，并且每一个内角都等于 60 度。

判定方法：

①利用定义：三边都相等的三角形是等腰三角形。

②三个角都相等的三角形都是等边三角形。

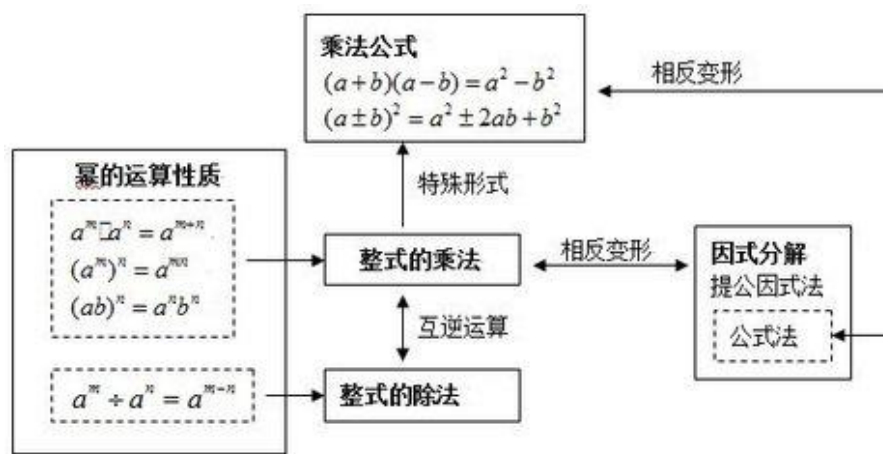
③有一个角是 60 度的等腰三角形是等边三角形。

（5）含 30 度角的直角三角形的性质

在直角三角形中，如果一个锐角等于 30 度，那么它所对的直角边等于斜边的一半。

第十四章 整式的乘法与因式分解

一. 知识框架



二. 知识概念

1. 整式的乘法

(1) 同底数幂的乘法: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (m, n 都是正数)。

即: 同底数幂相乘, 底数不变, 指数相加。

(2) 幂的乘方: $(a^m)^n = a^{mn}$ (m, n 都是正数)。

即: 幂的乘方, 底数不变, 指数相乘。

(3) 积的乘方: $(ab)^n = a^n b^n$ (n 为正数)。

即: 积的乘方, 等于把积的每一个因式分别乘方, 再把所得的幂相乘。

(4) 整式的乘法

①单项式与单项式乘法法则

单项式与单项式相乘, 把它们的系数、相同字母分别相乘, 对于只在一个单项式里含有的字母, 连同它的指数作为积的一个因式。

②单项式与多项式相乘法法则

单项式与多项式相乘, 就是用单项式去乘多项式的每一项, 再把所得的积相加。

③多项式与多项式相乘法法则

多项式与多项式相乘, 先用一个多项式中的每一项乘以另一个多项式的每一项, 再把所得的积相加。

2. 整式的除法

(1) 同底数幂的除法: $a^m \div a^n = a^{m-n}$ ($a \neq 0, m, n$ 都是正数, 且 $m > n$)。

即同底数幂相除, 底数不变, 指数相减。

【注意】

①法则使用的前提条件是“同底数幂相除”而且 0 不能做除数, 所以法则中 $a \neq 0$ 。

②任何不等于 0 的数的 0 次幂等于 1, 即 $a^0 = 1 (a \neq 0)$, 如 $10^0 = 1$, 而 0^0 无意义。

③任何不等于 0 的数的 $-p$ 次幂 (p 是正整数), 等于这个数的 p 的次幂的倒数。即 $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ ($a \neq 0, p$ 是正整数)。

而 $0^{-1}, 0^{-3}$ 都是无意义的; 当 $a > 0$ 时, a^{-p} 的值一定是正的;

当 $a < 0$ 时, a^{-p} 的值可能是正也可能是负的, 如 $(-2)^{-2} = \frac{1}{4}, (-2)^{-3} = -\frac{1}{8}$ 。

数学八年级（上册）知识点总结

（2）整式的除法

①单项式除法法则

单项式相除，把系数与同底数幂分别相除，作为商的因式，对于只在被除式里含有的字母，则连同它的指数作为商的一个因式。

②多项式除以单项式法则

多项式除以单项式，先把这个多项式的每一项除以单项式，再把所得的商相加。

3. 乘法公式

（1）平方差公式： $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 。

【拓展】

公式中的字母 a, b 可以是数，也可以是式子（包含单项式、多项式等），只要符合平方差的结构特征，就可以运用公式。

如： $(-a+b)(-a-b)=(-a)^2-b^2$ ；

$$(-a-b)(a-b)=(-b)^2-a^2。$$

（2）平方差公式： $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ 。

（3）添括号法则： $a+b+c=a+(b+c)$ ；

$$a-b-c=a-(b+c)。$$

4. 因式分解

（1）因式分解的概念：把一个多项式化成几个整式的积的形式，这种变形叫做把这个多项式因式分解或分解因式。

【拓展】

①因式分解与整式乘法互逆，即因式分解把“和差”化为“积”的形式，而整式乘法是把“积”化为“和差”的形式。

②分解因式必须进行到每一个多项式因式都不能再分解为止，即分解因式要彻底。

（2）因式分解的方法

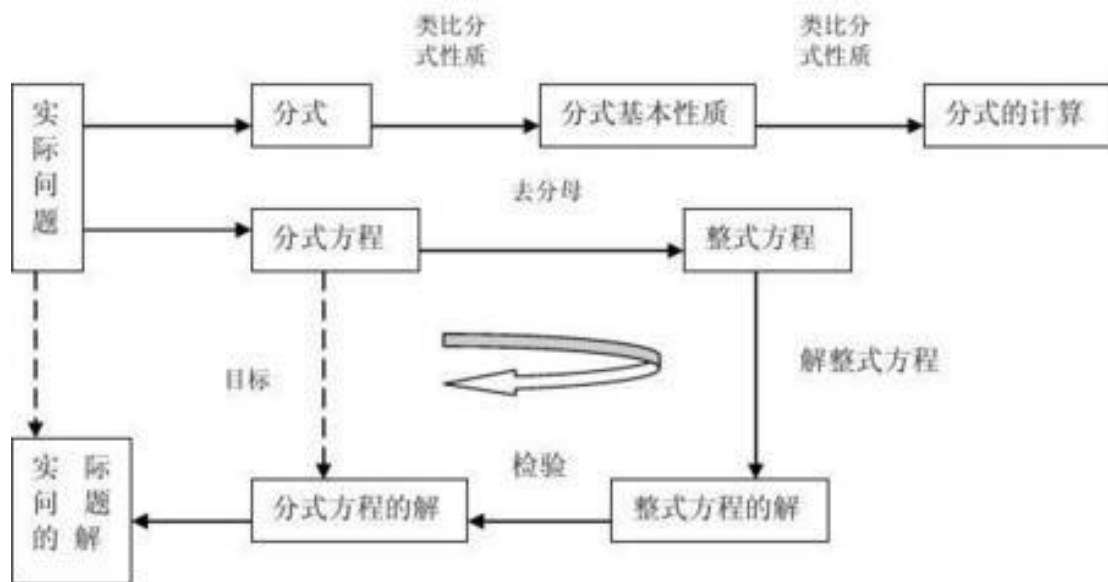
①提公因式法： $pa+pb+pc=p(a+b+c)$ 。

②公式法： $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ ； $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$ 。

③十字相乘法： $x^2+(p+q)x+pq=(x+p)(x+q)$ 。

第十五章 分式

一. 知识框架



二. 知识概念

1. 分式

(1) 分式的定义：一般地，如果 A, B 表示两个整式，并且 B 中含有字母，那么式子 $\frac{A}{B}$ 叫做分式。其中 A 称为分式的分子， B 称为分式的分母。

【注意】

① 整式和分式统称有理式。

② 分式 $\left\{ \begin{array}{l} 1. \text{有意义的条件：分式中分母不为0，即 } B \neq 0. \\ 2. \text{无意义的条件：分式中分母为0，即 } B = 0. \\ 3. \text{值为0的条件：分式中分子为0，分母不为0，即 } A = 0, B \neq 0. \end{array} \right.$

(2) 分式的基本性质

① 分式的基本性质：分式的分子与分母同乘（或除以）一个不等于 0 的整式，分式的值不变。

即 $\frac{A}{B} = \frac{A \cdot C}{B \cdot C}, \frac{A}{B} = \frac{A \div C}{B \div C} (C \neq 0)$ ，其中 A, B, C 是整式。

② 约分：利用分式的基本性质，把分式的分子和分母的公因式约去，不改变分式的值，这样的分式变形叫做分式的约分。

【注意：约分的步骤】

第一步：把分式的分子与分母分解因式；

第二步：约去分子与分母的公因式，如 $\frac{a \cdot m}{b \cdot m} = \frac{a}{b}$ 。

数学八年级（上册）知识点总结

③最简分式：分子与分母没有公因式的分式叫做最简分式。

④通分：利用分式的基本性质，使分子和分母同乘适当的整式，不改变分式的值，把分母不同的分式化成分母相同的分式，这样的分式变形叫做分式的通分。

⑤最简公分母：各分式分母的所有因式的最高次幂的积，叫做最简公分母。

【注意：确定分式的最简公分母的步骤】

第一步：取各分式的分母中系数的最小公倍数；

第二步：各分式的分母中所有字母或因式都要取到；相同字母（或因式）的幂取指数最大的；

第三步：所得的系数的最小公倍数与各字母（或因式）的最高次幂的积即为最简公分母。

2. 分式的运算

（1）分式的乘除

①乘法法则： $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ 。

②除法法则： $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ 。

③乘方法则：一般地，当 n 是正整数时， $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$ 。

（3）分式的加减

①同分母分式相加减，分母不变，把分子相加减。

即： $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$ 。

②异分母分式相加减，先通分，变为同分母的分式，在加减。

即： $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}$ 。

3. 分式方程

（1）分式方程：分母中含未知数的方程叫做分式方程。

（2）分式方程的解法：

①去分母（方程两边同时乘以最简公分母，将分式方程化为整式方程）；

②按解整式方程的步骤求出未知数的值；

③验根（求出未知数的值后必须验根，因为在把分式方程化为整式方程的过程中，扩大了未知数的取值范围，可能产生增根）。

（4）增根：使最简公分母为 0 的根叫做分式方程的增根。

（5）检验分式方程增根的方法：将整式方程的解代入最简公分母，如果最简公分母的值不为 0，则整式方程的解是原分式方程的解；否则，这个解不是原分式方程的解。

（6）列分式方程解运用题：思路和步骤与列一元一次方程解运用题基本一致。但要注意得到方程的根后应检验它是否是原分式方程的根，若是则舍去，若不是增根还应检验它是否符合实际意义。