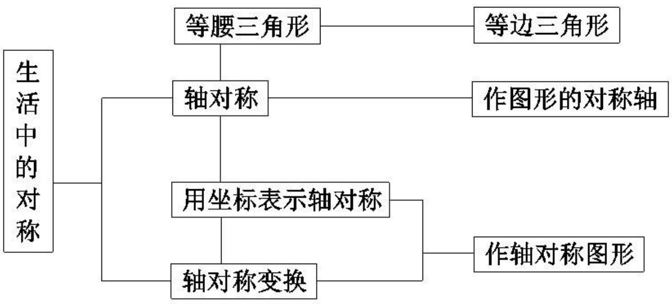
八年级数学上册知识点总结

第十三章　轴对称

一、知识框架：



二、知识概念：

1. 基本概念：

⑴轴对称图形：如果一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形就叫做轴对称图形.

⑵两个图形成轴对称：把一个图形沿某一条直线折叠，如果它能够与另一个图形重合，那么就说这两个图形关于这条直线对称.

⑶线段的垂直平分线：经过线段中点并且垂直于这条线段的直线，叫做这条线段的垂直平分线.

⑷等腰三角形：有两条边相等的三角形叫做等腰三角形. 相等的两条边叫做腰，另一条边叫做底边，两腰所夹的角叫做顶角，底边与腰的夹角叫做底角.

⑸等边三角形：三条边都相等的三角形叫做等边三角形.

2. 基本性质：

⑴对称的性质：

①不管是轴对称图形还是两个图形关于某条直线对称，对称轴都是任何一对对应点所连线段的垂直平分线.

②对称的图形都全等.

⑵线段垂直平分线的性质：

①线段垂直平分线上的点与这条线段两个端点的距离相等.

②与一条线段两个端点距离相等的点在这条线段的垂直平分线上.

⑶关于坐标轴对称的点的坐标性质

①点 $P\ (x,y)$ 关于 x 轴对称的点的坐标为 $P'\ (x,-y)$.

②点 $P\ (x,y)$ 关于 y 轴对称的点的坐标为 $P''\ (-x,y)$.

⑷等腰三角形的性质：

①等腰三角形两腰相等.

②等腰三角形两底角相等（等边对等角）.

③等腰三角形的顶角角平分线、底边上的中线，底边上的高相互重合.

④等腰三角形是轴对称图形，对称轴是三线合一（1 条）.

⑸等边三角形的性质：

①等边三角形三边都相等.

②等边三角形三个内角都相等，都等于 60°

③等边三角形每条边上都存在三线合一.

④等边三角形是轴对称图形，对称轴是三线合一（3 条）.

3. **基本判定：**

(1)等腰三角形的判定：

①有两条边相等的三角形是等腰三角形.

②如果一个三角形有两个角相等，那么这两个角所对的边也相等（等角对等边）.

(2)等边三角形的判定：

①三条边都相等的三角形是等边三角形.

②三个角都相等的三角形是等边三角形.

③有一个角是 60° 的等腰三角形是等边三角形.

4. **基本方法：**

(1)做已知直线的垂线：

(2)做已知线段的垂直平分线：

(3)作对称轴：连接两个对应点，作所连线段的垂直平分线.

(4)作已知图形关于某直线的对称图形：

(5)在直线上做一点，使它到该直线同侧的两个已知点的距离之和最短.

含 30° 角的直角三角形的性质（重点）

（1）含 30 度角的直角三角形的性质：

在直角三角形中，30° 角所对的直角边等于斜边的一半.

（2）此结论是由等边三角形的性质推出，体现了直角三角形的性质，它在解直角三角形的相关问题中常用来求边的长度和角的度数.

（3）注意：①该性质是直角三角形中含有特殊度数的角（30° ）的特殊定理，非直角三角形或一般直角三角形不能应用；

②应用时，要注意找准 30° 的角所对的直角边，点明斜边.

最短路径将军饮马问题作图（五大常考模型）

一、两定一动型：

1. 异侧和值最小型

例 1：如图 13-1 所示：在定直线 l 上找一个动点 P，使动点 P 到两个定点 A 与 B 的距离之和最小，即 PA+PB 最小.

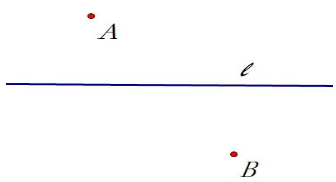


图 13-1

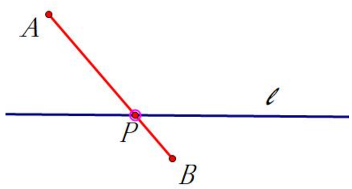


图 13-1-1

作法：如图 13-1-1 连接 AB，与直线 l 的交点 P，点 P 即为所要寻找的点，此时 PA+PB 最小，且最小值等于 AB.

原理：两点之间，线段最短.

2.同侧和值最小型

例 2：如图 13-2 所示，直线 l 和 l 的同侧两点 A、B，在直线 l 上求作一点 P，使 PA+PB 最小.

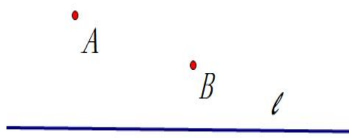


图 13-2

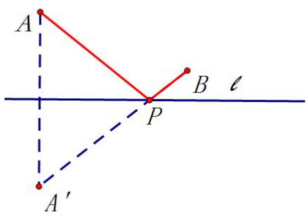


图 13-2-1

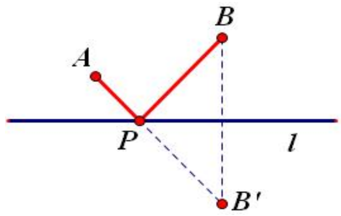


图 13-2-2

关键：找对称点

作法一：如图 13-2-1 所示，作定点 A 关于定直线 l 的对称点 A'，连接 BA'，与直线 l 的交点 P 即为所要寻找的点，此时 PA+PB 和最小，且最小值等于 BA'.

作法二：如图 13-2-2 所示，作定点 B 关于定直线 l 的对称点 B'，连接 AB'，与直线 l 的交点 P 即为所要寻找的点，此时 PA+PB 和最小，且最小值等于 AB'.

原理：两点之间，线段最短

3.同侧差值最大型

例 3：如图 13-3 所示：定点 A 与 B 在定直线 l 的同侧（A，B 两点到 l 的距离不相等），在直线上 l 求作一点 P，使 $|PA-PB|$ 的值最大.

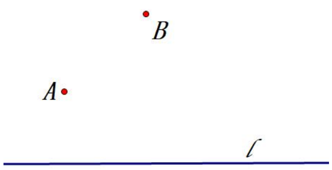


图 13-3

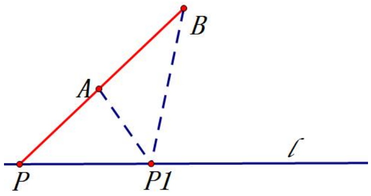


图 13-3-1

作法：如图：13-3-1 所示，连接 BA 并延长，交直线 l 于点 P，点 P 即为所求。此时 $|PA-PB|$ 最大，最大值为 AB 的长.

原理：三角形任意两边之差小于第三边.

证明：在 l 上任取异于点 P 的一点 P_1，连接 P_1A，P_1B,如图 13-3-1 所示，在 ΔABP_1 中，由三角形的三边关系知 $|P_1A-P_1B|$<AB,而 AB=$|PA-PB|$，∴P 为直线 AB 与 l 的交点时，

$|PA-PB|$ 最大，最大值为 AB 的长.

4. 异侧差值最大型

例 4：如图 13-4 所示，定点 A，B 在定直线 l 的异侧（A,B 两点到 l 的距离不相等），在直线 l 上求作一点 P，使 $|PA-PB|$ 的值最大.

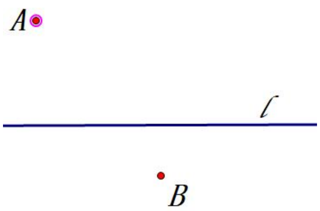


图 13-4

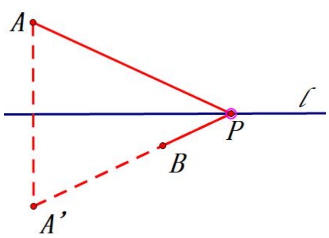


图 13-4-1

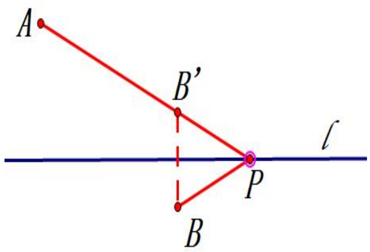


图 13-4-2

作法一：如图 13-4-1 所示，作点 A 关于直线 l 的对称点 A'，连接 A'B 并延长交直线 l 于点 P，点 P 即为所求，此时 $|PA-PB|$ 最大，最大值为 BA'的长.

原理：三角形任意两边之差小于第三边.

证明：根据轴对称性质可知 PA'=PA，要使 $|PA-PB|$ 值最大，只需 $|PA'-PB|$ 值最大，从而转化为同侧差值最大型.

作法二：如图 13-4-2 所示，作点 B 关于直线 l 的对称点 B'，连接 AB'并延长交直线 l 于点 P，点 P 即为所求，此时 $|PA-PB|$ 最大，最大值为 AB'的长.

二、一定两动型

例 5：如图 13-5 所示，点 P 是∠MON 内的一点，分别在 OM，ON 上作点 A，B。使△PAB 的周长最小.

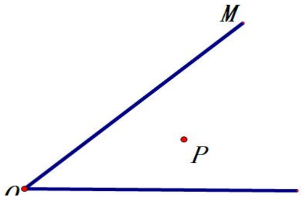


图 13-5

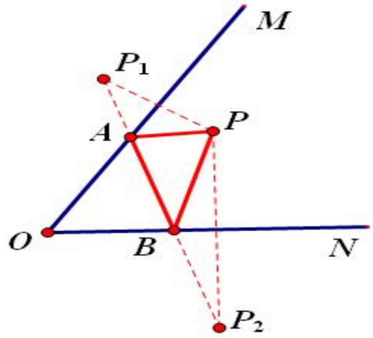


图 13-5-1

作法：如图 13-5-1 所示，分别作点 P 关于 OM 的对称点 P_1，关于 ON 的对称点 P_2，连接 P_1P_2,与 OM 交于点 A，与 ON 交于点 B，连接 PA，PB,此时 ΔPAB 的周长最短，最小值为线段 P_1P_2 的长度.

原理：两点之间，线段最短.

证明：由轴对称的性质知 $PA=P_1A$，$PB=P_2B$，根据两点之间线段最短，当 P_1，A，B，P_2 四点共线时，ΔPAB 的周长=$PA+PB+AB=P_1P_2$，其值最短.

三、两定两动型：

例 6.如图 13-6 所示,A,B 为锐角∠MON 内两个定点,在 OM 上求作一点 P,在 ON 上求作一点 Q,使四边形 APQB 的周长最小

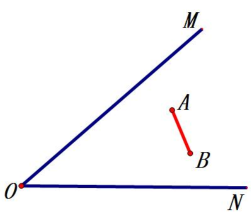


图 13-6

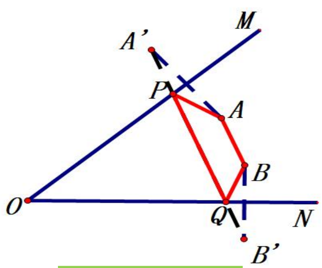


图 13-6-1

作法:如图 13-6-1 所示,作点 A 关于直线 OM 的对称点 A',作点 B 关于直线 ON 的对称点 B',连接 A'B'交 OM 于 P,交 ON 于 Q,此时四边形 APQB 的周长最小,最小值为线段 AB 和 A'B'的长度之和.

原理:两点之间,线段最短

证明：由轴对称的性质知 PA=PA',QB=QB',AB 的长为定值,当 A',P,Q,B'四点共线时,PA'+PQ+QB'的值小,即 PA+PQ+QB 的值最小,此时四边形 APQB 的周长最小.

四、一定两动垂直型

例 7:如图 13-7 所示,点 A 为锐角∠MON 内一定点,在射线 OM 上求作一点 P,在射线 ON 上求作一点 Q,使 AP+PQ 的值最小.

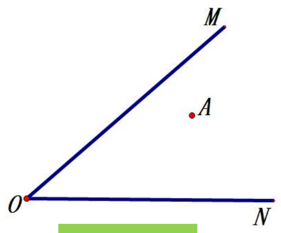


图 13-7

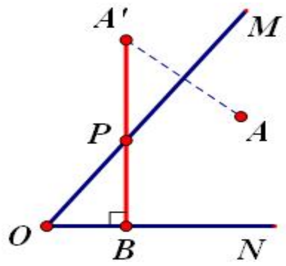


图 13-7-1

作法:如图 13-7-1 所示,作点 A 关于直线 OM 的对称点 A',过点 A'作 A'Q⊥ON 于点 Q,A'Q 交 OM 于点 P,此时 AP+PQ 最小

原理 ：垂线段最短

证明：由轴对称的性质知 PA=PA',要使 AP+PQ 最小,只需 A'P+PQ 最小,即 A'Q⊥ON 时，AP+PQ 最小

五、两定两动平移型（造桥选址）：

例 8：如图 13-8 所示,直线 m∥n,点 A,B 分别为直线 m 上方和直线 n 下方的定点(直线 AB 不与直线 m 垂直)在直线 m,n 之间求作垂线段 PQ,使得 AP+PQ+BQ 最小

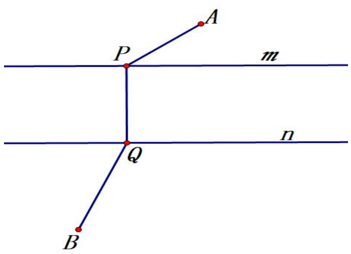


图 13-8

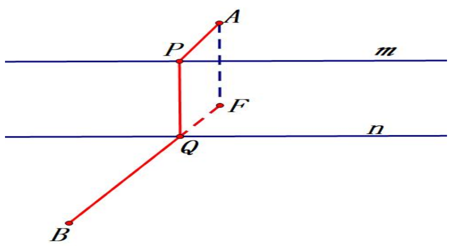


图 13-8-1

作法:如图 13-8-1 所示,将点 A 沿着垂直于直线 m 的方向,向下平移至点 A',使得 AA'=PQ,连接 A’B 交直线 n 于点 Q,过点 Q 作 PQ⊥n,交直线 m 于点 P,线段 PQ 即为所求,此时 AP+PQ+BQ 最小.

依据:平移的性质,两点之间线段最短